Двумерное преобразование Фурье:

Переменные *u* и *v* принято называть частотными переменными, а область их изменения – частотным пространством по аналогии с *х* и *у* – пространственными переменными и пространственной областью их определения.

Каждый элемент Фурье-образа содержит все отсчеты функции . Поэтому обычно, за исключением тривиальных случаев, невозможно установить прямое соответствие между характерными деталями изображения и его Фурье-образа. Однако некоторые общие утверждения относительно взаимосвязи частотных составляющих Фурье-образа и пространственных характеристик изображения могут быть сделаны. Частоты в Фурье-преобразовании связаны с вариацией яркости на изображении. Наиболее медленно меняющаяся (постоянная) частотная составляющая совпадает со средней яркостью изображения. Низкие частоты, отвечающие точкам вблизи начала координат Фурье-преобразования, соответствуют медленно меняющимся компонентам изображения. На изображении комнаты, например, они могут соответствовать плавным изменениям яркости стен и пола. По мере удаления от начала координат, более высокие частоты начинают соответствовать все более и более быстрым изменениям яркости, которые суть границы объектов (контуры) и другие детали изображения, характеризуемые резкими изменениями яркости, такие как шум.

Один из часто используемых способов обработки изображения, которая выполняется с различными целями, является частотная фильтрация. Процедура фильтрации состоит из следующих шагов (рисунок 1.1):

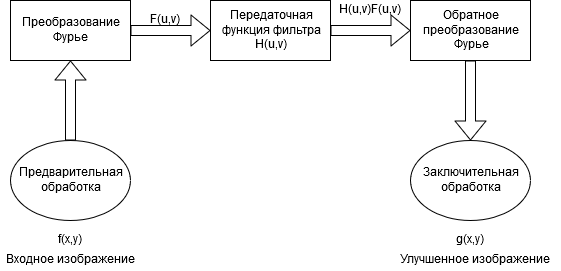


Рисунок 1.1 – Основные этапы фильтрации в частотной области

Порядок фильтрации в частотной области:

1. Исходное изображение умножается на , чтобы его преобразование Фурье оказалось центрированным.
2. Вычисляется прямое ДПФ изображения, полученного после шага 1.
3. Функция умножается на функцию фильтра .
4. Вычисляется обратное ДПФ от результата шага 3.
5. Выделяется вещественная часть результата шага 4.
6. Результат шага 5 умножается на .

Пусть обозначает входное изображение после шага 1, – его Фурье-образ, тогда Фурье-образ выходного изображения определяется выражением:

Каждая компонента Фурье образа определяет некоторое свойство изменения яркости на изображении. Элементы, соответствующие низким частотам (вблизи начала координат) определяют плавные переходы, и чем выше значения этих элементов там более размытым будет изображение.

Высокие частоты определяют резкие переходы яркости. Поэтому чем большие значения имеют элементы образа Фурье для больших значений *u* и *v* тем ярче будут контуры.

На этих свойствах основано действие частотных фильтров.

Простейшими из них являются идеальные высокочастотный и низкочастотный фильтры.

Идеальный низкочастотный фильтр сохраняет без изменений (в идеальном виде) значения низких частот и обнуляет все высокие.

Передаточная функция идеального низкочастотного фильтра задается выражением:

где *D*0 – неотрицательная константа, которая определяет расстояние от начала координат до границы между сохраняемыми и обнуляемыми частотами;

*D(u,v) –* евклидоворасстояние от начала координат до точки с текущим значением *(u,v)*.

Началом координат для Фурье-образа изображения считается точка (*M/*2*,N/*2), так как изображение на этапе предобработки было центрировано. Поэтому евклидово расстояние от некоторой точки *(u,v)* до начала координат может быть вычислено с помощью простого выражения:

Величину *D*0 принято называть *частотой среза*.

Если для фильтрации использовать обратную передаточную функцию:

,

то будет получен идеальный высокочастотный фильтр. Он позволяет выделить контуры на изображении и удаляет фоновые детали. Его эффект тем больше, чем больше частота среза.

Для идеальных фильтров, как высокочастотных, так и низкочастотных характерен нежелательный побочный эффект, который проявляется в возникновении ложных контуров на отфильтрованном изображении. Такой эффект по аналогии с терминологией теории обработки сигналов принят называть «эффектом звона». Степень проявления этого эффекта также связана с величиной частоты среза, как и описанные основные эффекты от фильтров.

Передаточная функция низкочастотного фильтра Баттерворта задается формулой:

Константа *n* определяет порядок фильтра. При *n=*1 получаем фильтр первого порядка, при *n=*2 фильтр второго порядка и т.д. Чем выше порядок фильтра, тем больше проявляются как основные, так и побочные эффекты («звон»).

Для высокочастотного фильтра применяется передаточная функция заданная следующим выражением:

.

Для этих фильтров характерно отсутствие резкой черты, разделяющей сохраняемые и обрезаемые частоты. Переход между ними выполняется плавно.

Эффект от такого фильтра меньший чем от идеального, но и «звон» проявляется в меньшей степени, особенно для фильтров первого и второго порядка.

К числу фильтров, гарантированных от появления «звона» относятся фильтры Гаусса. Результаты применения таких фильтров очень схожи с изображениями обработанными фильтрами Баттерворта второго порядка (рис 31).

Передаточная функция низкочастотного фильтра Гаусса задается формулой:

.

Для высокочастотного фильтра это выражение принимает вид:

.

Влияние частоты среза для этих фильтров такое же, как и для идеальных. Чем меньше значение *D*0 для низкочастотного фильтра, тем выше эффект размывания. И наоборот, чем выше значение *D*0 для высокочастотного фильтра, тем больше будут выделены яркие контуры.

Умножение функций двух переменных и осуществляется поэлементно, то есть первый элемент функции умножается на первый элемент функции , второй элемент функции умножается на второй элемент функции и так далее. В общем случае компоненты фильтра являются комплексными величинами. На практике чаще всего используются с действительными компонентами. В этом случае и действительная и мнимая часть функции умножаются на одну и ту же действительную функцию фильтра . Такие фильтры называются фильтрами нулевого фазового сдвига, поскольку не меняют фазу Фурье-преобразования.